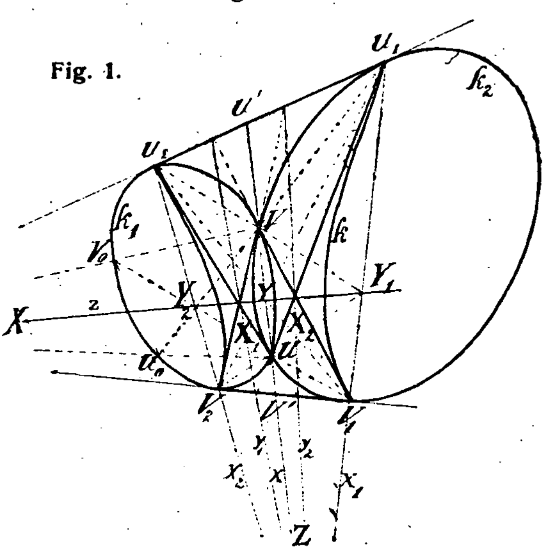
Über konjugierte Kegelschnitt-tripel.

Von L. KLUG in Budapest.

Drei Kegelschnitte, welche die Lage haben, dass je zwei derselben in bezug auf den dritten Polargebilde von einander sind, bilden e i n e n T r i p e l k o n j u g i e r t e r K e g e l s c h n i t t e. Die wichtigsten Eigenschaften derselben sollen hier auf synthetischem Wege bewiesen werden.

1. Dazu gehen wir von zwei in vierfacher Weise perspektiven Dreiecken UU_1U_2, VV_1V_2 aus, die wir in folgender Weise konstruieren können (Fig. 1.). Das Viereck $U_1U_2V_1V_2$ habe die Diagonalpunkte $X=(U_1U_2, V_1V_2)$, $Y=(U_1V_2, U_1V_2)$, $Z=(U_1V_1, U_2V_2)$.

Fig. 1.



Trifft die Diagonale $z=XY$ die Viereckseiten U_1V_1, U_2V_2 in den Punkten Y_1, Y_2, so liegen die Punkte

$$V=(U_1Y_2, U_2Y_1),$$
$$U=(V_1Y_2\ V_2Y_1)$$

auf der Diagonale $x=YZ$, und die Punkte X,

$$X_1=(U_2U\ V_2V),$$
$$X_2=(UU_1, V_1V),$$

trennen je zwei der drei Punkte Y, Y_1, Y_2 vom dritten harmonisch. Also sind XY, X_1Y_1, X_2Y_2 zugeordnete Punkte einer Involution I_0, deren konjugiert-imaginären Doppelpunkte II' mit jedem dieser Punktpaare aequianharmonische

Würfe bilden. Die zwei Punkttripel XX_1X_2, YY_1Y_2 bilden noch in dreifacher Weise Involutionen J, J_1, J_2, in welchen $XY.X_1Y_2.X_2Y_1$, $XY_2.X_1Y_1.X_2Y$, $XY_1.X_1Y.X_2Y_2$ zugeordnete Punkte sind.

Die Dreiecke

$$\begin{matrix} UU_1U_2 & UU_1U_2 & UU_1U_2 & UU_1U_2 \\ VV_1V_2 & VV_2V_1 & V_2V_1V & V_1VV_2 \end{matrix}$$

sind perspektiv in bezug auf die Kollineationsmittelpunkte und Achsen

$$Z, z = XY, \quad Y, y = ZX, \quad Y_1, y_1 = ZX_1, \quad Y_2, y_2 = ZX_2,$$

und von diesen bilden die drei letzteren eine zyklische Perspektivität.

Durch je zwei homologe Eckpunkte der Dreiecke der ersten Perspektivität kann man einen Kegelschnitt legen, welcher in diesen Eckpunkten von homologen Dreieckseiten berührt wird. Denn umschreibt man z. B. dem Viereck $U_1U_2V_1V_2$ den Kegelschnitt k, welcher die Dreieckseite $u_2 = U_1U$ berührt, so berührt k auch die Dreieckseiten $u_1 = U_2U$, $v_2 = V_1V$, $v_1 = V_2V$, welche von jener durch die Eckpunkte und Gegenseiten des Diagonaldreieckes XYZ des Viereckes harmonisch getrennt sind.

Ebenso ist der Kegelschnitt k_1 dem Viereck U_2UV_2V umschrieben und (wenn $u = U_1U_2$, $v = V_1V_2$ ist) dem Vierseit u_2uv_2v einbeschrieben, und der Kegelschnitt k_2 dem Viereck UU_1VV_1 umschrieben, dem Vierseit uu_1vv_1 aber einbeschrieben, weil X_1Y_1Z und X_2Y_2Z das Diagonaldreieck des ersten, bzw. des zweiten Viereckes und Vierseits ist.

Für alle drei Kegelschnitte k, k_1, k_2 ist z die Polare des Punktes Z um die gemeinsame Sehnen der Kegelschnittpaare k_1k_2, k_2k, kk_1 sind bzw. $x = ZY$, y; $x_1 = ZY_1$, y_1; $x_2 = ZY_2$, y_2 auf welche die Kontingenzpunkte jener Kegelschnittpaare X, Y; X_1, Y_1; X_2, Y_2 liegen, woraus dann folgt, dass Zll' ein gemeinsames Polardreieck ist für alle drei Kegelschnitte, während J, J_1, J_2 bzw. die Involutionen der konjugierten Pole der Kegelschnitte k, k_1, k_2 sind.

Die Projektion der Involution $J_0 = XY.X_1Y_1.X_2Y_2$ aus dem Punkte U_2 des Kegelschnitts k_1 auf diesen ist eine Involution, deren Achse y_2 ist und deren Pol Y auf der Geraden $UV = x$ liegt. y_2 ist eine gemeinsame Sehne der Kegelschnitte k_1k, y aber eine gemeinsame Sehne der Kegelschnitte k_1k_2, also bilden die Treffpunkte dieser gemeinsamen Sehnen y_2, y mit k_1 oder was dasselbe ist: zwei der Treffpunkte der Kegelschnitte $k_1 k$, und zwei der Treffpunkte der Kegelschnitte $k_1 k_2$ auf k_1 einen aequianharmonischen Wurf.

Projiziert man aber die nämlich Involution J_0 aus dem Punkte U auf den nämlichen Kegelschnitt k_1, so ist die Achse der erhaltenen Involution y, der Pol aber der auf $U_2 V_2 = x_2$ liegender Punkt Y_2. Nun ist wie früher, y eine gemeinsame Sehne für $k_1 k$, und x_2 eine gemeinsame Sehne für $k_1 k$; also bilden die Treffpunkte der zwei anderen gemeinsamen Sehnen dieser Kegelschnitte mit k_1, oder was dasselbe ist, die zwei anderen Treffpunkte der Kegelschnitte $k_1 k$ und $k_1 k_2$ ebenfalls einen aequianharmonischen Wurf.

D. h. Die reellen Treffpunkte eines beliebigen der drei Kegelschnitte k, k_1, k_2 mit einem zweiten und die konjugiert-imaginäre Treffpunkte des ersten und dritten Kegelschnitts bilden einen aequianharmonischen Wurf.

Man findet auch leicht, dass der Polarkegelschnitt eines beliebigen der drei Kegelschnitte in bezug auf einen zweiten der dritte Kegelschnitt ist. Denn z. B. sind die Polaren und Pole der Punkte $U_1 V_1\, UV$ und der Tangenten $u\, v\, u_1\, v_1$ des Kegelschnitts k_2 in bezug auf k_1: die Tangenten $u_1\, v_1\, u_2\, v_2$ und Punkte $U_2\, V_2\, U_1\, V_1$ des Kegelschnitts k.

Alles zusammengefasst können wir sagen.

Sind zwei Dreiecke in vierfacher Weise perspektiv, so sind von diesen Perspektivitäten drei zyklisch. Durch je zwei Paar homologer Eckpunkte der Dreiecke der vierten Perspektivität kann man Kegelschnitte legen, welche in diesen Eckpunkten zwei Paar homologe Dreieckseiten berühren, und es gibt also drei solche Kegelschnitte; sie bilden ein Tripel konjugierter Kegelschnitte.

Je zwei derselben haben nur zwei reelle gemeinsame Sehnen, welche sich im Kollineationsmittelpunkt Z der vierten Perspektivität treffen, aber nur auf einer Sehne jedes Paares haben sie reelle Punktpaare. Ebenso haben je zwei dieser Kegelschnitte nur zwei reelle Kontingenzpunkte auf der Kollineationsachse der früheren Perspektivität aber nur von einem derselben strahlen reelle Tangenten aus und sie sind mit jenen gemeinsamen Sehnen inzident. Die Involution der drei Paar Kontingenzpunkte ist eine besondere, indem die Kontingenzpunktpaare mit den Doppelpunkten der Involution aequianharmonische Würfe bilden; und die Doppelpunkte und Z sind die Eckpunkte eines Polardreieckes der drei Kegelschnitte.

Jeder der drei Kegelschnitte wird von jedem der zwei anderen in zwei reellen und in zwei konjugiert-imaginären Punkten getroffen; die zwei reelle Treffpunkte des einen und die zwei konjugiert-imaginäre Treffpunkte des anderen bilden auf dem ersten Kegelschnitt aequianharmonische Würfe.

Endlich sind je zwei der drei Kegelschnitte in bezug auf den dritten Polargebilde von einander.

2. Wir wollen jetzt zwei Kegelschnitte bestimmen, die einen gegebenen Kegelschnitt k_1 zu einem Tripel konjugierter Kegelschnitte ergänzen.

Es sei (Fig. 1.) XY_2Z ein beliebiges Polardreieck von k_1, der Eckpunkt Y_2 ein innerhalb k_1 liegender Punkt. Die Seite Y_2Z des Polardreieckes habe mit k_1 die Punkte U_2, V_2 gemeinsam, und die Geraden, welche Z von U_2, Y_2 und V_2, Y_2 harmonisch trennen mögen k_1 in den Punkten V_0V, bzw. U_0U treffen. Dann bilden bekanntlich die Punkttripel UU_0U_2, VV_0V_2 auf k_1 in vierfacher Weise Involutionen. Wählt man die Bezeichung so, dass der Sinn jener Tripel entgegengesetzt sei, dann ist Y_2 der Mittelpunkt und XZ die Achse für eine jener Involutionen, und die Projektionen jener Tripel aus V (und auch aus U) auf die Gerade Y_2X sind die vierfach involutorische Punkttripel YY_2Y_1, X_2XX_1, so dass YX_2, Y_2X, Y_1X_1 konjugierte Pole sind von k_1.

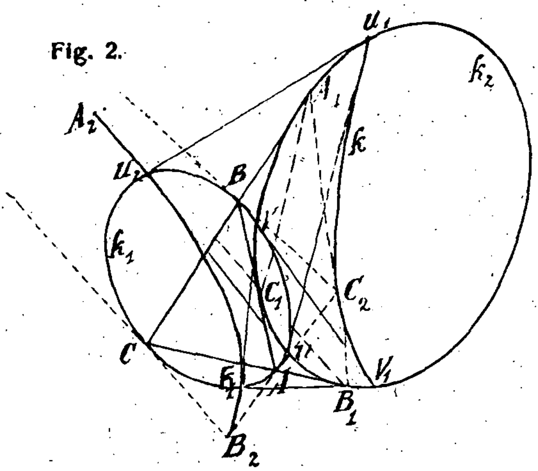
Da die Punktwürfe U_0VUU_2, V_0UVV_2 auf k_1 harmonisch sind, so geht die Gerade U_0V durch den Pol U_1 der Geraden UU_2, und die Gerade V_0U durch den Pol V_1 von VV_2, und diese Pole liegen mit Y_1 auf die Polare des Punktes X_1 bezüglich k_1. Wir haben jetzt zwei vierfach perspektive Dreiecke UU_1U_2, VV_1V_2, welche ein Tripel konjugierter Kegelschnitte bestimmen (1), und einer derselben ist k_1, da dieser durch die vier Eckpunkte UVU_2V_2 jener Dreiecke geht und die Gegenseiten derselben berührt. Da nun der Kegelschnitt k_1, ∞^3 Polardreiecke hat und man nach Obigem mit Hilfe eines Polardreieckes (XY_2Z) nur noch vier Kegelschnittpaare findet, welche mit k_1 ein konjugiertes Tripel bilden, so hat man:

Es giebt ∞^3 Kegelschnittpaare, welche einen gegebenen Kegelschnitt zu einem Tripel konjugierter Kegelschnitte ergänzen.

3. Wir sahen, dass die Tangenten in den zwei Treffpunkten von zwei beliebigen der Kegelschnitte eines konjugierten Tripels $k\,k_1\,k_2$ (Fig. 1. und 2.) durch die Berührungspunkte der gemein-

samen Tangenten der zwei Kegelschnitte gehen. Wir können daher jede Seite der vierfach perspektiven Dreiecke UU_1U_2, VV_1V_2, deren Eckpunkte die reellen gemeinsame Punkte jener Kegelschnitte sind (1. u. 2.), als ein dem einen Kegelschnitt umschriebenes und einem anderen einbeschriebenes verkümmertes Dreieck auffassen. So z. B. sind die Tangenten des Kegelschnitts k_2 in den Punkten U, U_1 zwei diesen umschriebene Dreiecke UU_2U_2, $U_1U_2U_2$, von welchen das erste dem Kegelschnitt k_1, das zweite dem Kegelschnitt k einbeschrieben ist. Wenn man aber einem Kegelschnitt ein Dreieck umschreiben kann, welches einem zweiten Kegelschnitt einbeschrieben ist, so giebt es deren unendlich viele. Also kann man jedem der Kegelschnitte eines konjugierten Tripels Dreiecke umschreiben, die einem zweiten Kegelschnitt des Tripels einbeschrieben sind.

Fig. 2.



Es sei nun ABC ein allgemeines dem Kegelschnitt k_2 umschriebenes und dem Kegelschnitt k_1 einbeschriebenes Dreieck (Fig. 2.). k_2 und k sind in bezug auf k_1 Polarkegelschnitte, also liegen die Pole A_2, B_2, C_2 der Seiten BC, CA, AB des Dreieckes (als Tangenten von k_2 in den Punkten A_1, B_1, C_1) nach k_1 auf k. Die Seiten B_2C_2, C_2A_2, A_2B_2 des Dreieckes $A_2B_2C_2$ als Polaren der Punkte A, B, C nach k_1 berühren diesen; also ist das Dreieck $A_2B_2C_2$ dem Kegelschnitt k_1 umschrieben und dem Kegelschnitt k einbeschrieben.

Da das Dreieck ABC dem Kegelschnitt k_1 einbeschrieben und dem Kegelschnitt k_2 umschrieben ist, so ist es ein Polardreieck von k, denn wäre die Polare von A in bezug auf k von BC verschieden, so gingen aus A vier Tangenten zu k_2; und ebenso ist das dem k einbeschriebenes und dem k_1 umschriebenes Dreieck $A_2B_2C_2$ ein Polardreieck von k_2.

Polarisiert man schliesslich k_1 mit dem umschriebenen und einbeschriebenen Dreieck $A_2B_2C_2$, bzw. ABC, von welchen das erste auch dem zweiten Dreieck umschrieben ist, in bezug auf k_2, so geht $A_2B_2C_2$ in sich selbst über, das Dreieck ABC in $A_1B_1C_1$, und der Kegelschnitt k_1 in k. Also ist das Dreieck $A_2B_2C_2$ dem Dreieck $A_1B_1C_1$ einbeschrieben, und die Seiten des letzteren berühren k in den Eckpunkten des ersteren, und $A_1B_1C_1$ ist ein Polardreieck von k_1.

Da die Eckpunkte BC des dem Kegelschnitt k_1 einbeschriebenen Dreieckes ABC konjugierte Pole sind von k, so trifft die Tangente BC des Kegelschnitts k_2 die beiden anderen Kegelschnitte des Tripels in einem harmonischen Punktwurf. Ebenso bilden die aus dem Punkte A ausstrahlenden Tangenten von k und k_2 einen harmonischen Strahlenwurf. Man hat daher:

Ein Tripel konjugierter Kegelschnitte hat die Eigenschaft, dass man jedem der Kegelschnitte ∞^1 Dreiecke einschreiben kann, welche einem zweiten umschrieben und Polardreiecke des dritten sind. Nimmt man einen Eckpunkt A eines Dreieckes auf einem ersten der drei Kegelschnitte beliebig an, so trifft seine Polare in bezug auf einem zweiten der Kegelschnitte diesen ersten in den zwei anderen Eckpunkten B, C des dem ersten einbeschriebenen und dem dritten Kegelschnitt umschriebenen Dreieckes, und die Berührungspunkte dieser Seiten sind die Eckpunkte eines Polardreieckes $A_1B_1C_1$ des ersten Kegelschnitts. Das Tangentendreieck $A_2B_2C_2$ mit den Berührungspunkten A, B, C des ersten Kegelschnitts ist dem Dreieck $A_1B_1C_1$ und dem zweiten Kegelschnitt einbeschrieben und Polardreieck des dritten Kegelschnitts.

Bewegt sich der Punkt A auf dem ersten Kegelschnitt, so bewegen sich mit ihm alle Eckpunkte der einander zyklisch einbeschriebenen Dreiecke ABC, $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ auf dem entsprechenden ersten, dritten und zweiten Kegelschnitt; die Eckpunkte dieser ∞^1 Dreiecke bilden auf jedem Kegelschnitt eine kubische Involution.

Jeder der Kegelschnitte ist der Ort der Strahlen, welche die zwei anderen Kegelschnitte in harmonischen Punktwürfen treffen, und zugleich der Ort der Punkte, von welchen die zu diesen zwei Kegelschnitten ausstrahlenden Tangenten harmonische Strahlenwürfe bilden.

Man kann die drei Kegelschnitte eines Tripels auch aus einem beliebigen Kegelschnitt k_1 und ein dem beliebig einbeschriebenen Dreieck ABC kontruieren. Die Tangenten der Eckpunkte des Dreieckes ABC bilden das Dreieck $A_2B_2C_2$ und die Projektion der Eckpunkte des Dreieckes ABC aus einem beliebigen Punkte D des Kegelschnitts k_1 auf die Gegenseiten sind die Eckpunkte eines dritten Dreieckes $A_1B_1C_1$. Der Kegelschnitt k_2 ist nun dem Dreieck $A_1B_1C_1$ umschrieben und dem Dreieck ABC einbeschrieben, während der dritte Kegelschnitt k dem Dreieck $A_2B_2C_2$ umschrieben und dem Dreieck $A_1B_1C_1$ einbeschrieben ist.

Daraus ergeben sich als Beispiele:

Schreibt man einem Dreieck die Hyperbel ein, welche zwei Seiten in ihren unendlichfernen Punkten, also die dritte in der Mitte berührt, und umschreibt man dem Dreieck eine Ellipse, welche die dritte Seite zum Durchmesser hat: dann giebt es eine Parabel, welche die zu den zwei anderen Dreieckseiten parallelen Ellipsendurchmesser dort berührt, wo sie die Ellipsentangenten der Gegeneckpunkte treffen. Die so erhaltene Ellipse, Hyperbel und Parabel bilden nun ein Tripel konjugierter Kegelschnitte.

Oder specialisiert:

Ein Kreis, der durch den Mittelpunkt einer gleichseitigen Hyperbel geht und seinen Mittelpunkt auf der Hyperbel hat, dann eine Parabel, welche die Hyperbeltangente des Kreismittelpunktes zur Leitlinie und den Hyperbelmittelpunkt zum Brennpunkt hat, und die gleichseitige Hyperbel selbst — geben ein Tripel konjugierter Kegelschnitte.

4. *In jedem Kegelschnittbüschel mit zwei reellen und zwei konjugiert-imaginären Grundpunkten giebt es zwei Kegelschnitte, welche durch einen dritten zu einem Tripel konjugierter Kegelschnitte ergänzt werden können.*

Es seien Z der Treffpunkt der zwei reellen Sehnen eines solchen Büschels, U, V die reellen Grundpunkte desselben, und Y sei der Treffpunkt der Polaren z des Punktes Z bezüglich der Kegelschnitte des Büschels mit der Sehne UV, X aber der Treffpunkt mit der anderen Sehne. Trennen nun die Punkte Y, U', das Punktpaar ZV, und die Punkte Y, V' das Punktpaar ZU harmonisch, so giebt es im Büschel zwei Kegelschnitte k_1, k_2, welche die Geraden XU', XV' in den Punkten U_2, U_1, bzw. V_2, V_1 berühren, und wie aus den vierfach perspektiven Dreiecken UU_1U_2, VV_1V_2 ersichtlich ist, sind diese die zwei Kegelschnitte des Büschels, welche durch einen dem Viereck $U_1U_2V_1V_2$ umschriebenen Kegelschnitt k zu einem Tripel ergänzt werden (Fig. 1).

Daraus kann man folgern:

„Zwei Kreise, deren Halbmesser gleich sind und deren Treffpunkte mit dem Halbmesser gleichen Abstand haben, dann eine Hyperbel, deren Brennpunkte in den Mittelpunkten jener Kreise liegen und deren Hauptachse mit dem Halbmesser der Kreise gleich ist und die daher durch die Berührungspunkte der gemeinsamen Tangenten jener Kreise geht, bilden ein Tripel konjugierter Kegelschnitte".

Die affine Darstellung dieser Figur giebt den Satz:

„Verschiebt man eine Ellipse, bis sie mit der verschobenen Ellipse eine Sehne gemein hat, die halb so gross ist, wie der zur Verschiebungrichtung konjugierte Durchmesser, so bilden die zwei Ellipsen mit derjenigen Hyperbel, welche durch die Berührungspunkte der gemeinsamen Tangenten gehend in diesen von den Tangenten der gemeinsamen Punkte der Ellipsen berührt wird, ein Tripel konjugierter Kegelschnitte".

Bildet man aber von den zwei Kreisen und der Hyperbel des früheren Satzes eine zentrisch-kollineare Figur u. z. in der Weise, dass man den Kollineationsmittelpunkt in der gemeinsamen Sehne UV der Kreise, und die Verschwindungslinie zu der Zentralachse der Kreise parallel annimmt, so gehen die zwei Kreise in zwei bezüglich der Sehne UV symmetrische Ellipsen, Parabeln oder Hyperbeln über, die Hyberbel aber geht über in eine Hyperbel die mit sich selbst bezüglich derselben Sehne symmetrisch liegt.

Wir wollen aber diese Figuren, d. h. solche Tripel konjugierter Kegelschnitte konstruieren, von welchen zwei bezüglich einer Achse des dritten Kegelschnitt symmetrisch liegen, — aber unabhängig von Kreispaar und der Hyperbel.

5. Es sei k_1 ein Kegelschnitt, g eine Gerade seiner Ebene; man bestimmte eine zu dieser parallele Sehne von k_1 so, dass k_1 und das Spiegelbi d k_2 desselben bezüglich der Sehne und noch ein dritter Kegelschnitt ein konjugiertes Tripel bilden sollen.

Sind U_2A, V_2B, die zwei zu g parallele und bei den Punkten U_2, V_2 normale Sehnen von k_1, UV eine mit diesen parallele Sehne von der halben Grösse derselben (oder, wenn die Punkte U_2, A verschiedenen Ästen einer Hyperbel angehöreh von doppelter Grösse derselben), und ist der Sinn von UV und AU_2 der nämliche, dann geht die Pascalgerade des Sechseckes AU_2U_2VUU durch den Punkt $E = (U_2V, AU)$ parallel mit der Sehne UV, und trifft die Tangente des Punktes U_2 in einem zu diesem bezüglich der Sehne UV symmetrischen Punkte U_1 so, dass $UU_1 = UU_2$ und UU_1 den Kegelschnitt in U berührt. Ist dann V_1 der Pol der Kegelschnittssehne VV_2, so folgt wie früher, dass $VV_1 = VV_2$. Also sind k_1 und sein Spiegelbild k_2 in bezug auf die Sehne UV, zwei Kegelschnitte eines konjugierten Tripels. Daher:

Sind zwei Kegelschnitte Spiegelbilder von einander bezüglich einer Sehne derselben die halb so gross ist, wie die zu ihr parallele normale Sehne derselben, so können sie durch einen dritten Kegelschnitt zu einem Tripel konjugierter Kegelschnitte ergänzt werden.

Als besondere Fälle hat man:

„Stehen die Achsen von zwei kongruenten Parabeln in ihren gemeinsamen Scheiteln aufeinander senkrecht, so bilden dieselben mit der Hyperbel, deren Asymptoten die Parabelachsen sind und welche von den Tangenten des anderen gemeinsamen Punktes der Parabeln in den Berührungspunkten der gemeinsamen Tangenten derselben berührt wird, und deren Hauptachse also dem Parameter der Parabeln gleich ist: ein Tripel konjugierter Kegelschnitte."

„Nimmt man ein regelmässiges Sechseck an und legt durch je zwei Nachbareckpunkte und ihre Gegeneckpunkte gleichseitige Hyperbeln, so erhält man ein Tripel konjugierter Kegelschnitte, die einen gemeinsamen Mittelpunkt haben und deren Brennpunkte auf dem dem Sechseck umschriebenen Kreis liegen."

Die sechs Hyperbelbögen über den sechs Seiten des regelmässigen Sechseckes geben eine aus dekorativem Gesichtspunkte gefälligere Figur, als wenn sie durch Kreisbögen mit derselben Konkavität ersätzt wären.

6. Die Eckpunkte von zwei vierfach perspektiven Dreiecken UU_1U_2, VV_1V_2 liegen auf einem Kegelschnitt $\varkappa$ und die Seiten derselben berühren ebenfalls einen Kegelschnitt $\varkappa'$. Dies folgt daraus, dass eine der Perspektivitäten zentrisch-involutorisch ist.

Da die Diagonaldreiecke XYZ, X_1Y_1Z, X_2Y_2Z der Vierecke $U_1U_2V_1V_2$, U_2UV_2V, UU_1VV_1 Polardreiecke von $\varkappa$ sind, so geht $\varkappa$ durch die imaginäre Doppelpunkte II' der Involutien $J_0 = XY . X_1Y_1 . X_2Y_2$ und wird in diesen Punkten von den Strahlen ZI, ZI' berührt.

Dasselbe kann man auch von $\varkappa'$ sagen, voraus dann folgt, dass sich $\varkappa$ und $\varkappa'$ in den Punkten I, I' berühren.

Die Tangenten des Kegelschnitts $\varkappa$ in den Eckpunkten der zwei Dreiecke UU_1U_2, VV_1V_2 trennen die Dreieckseitenpaare von Z harmonisch und treffen sich paarweise in den Punkten X, X_1, X_2, und die Berührungspunkte der Dreieckseiten mit $\varkappa'$ trennen die Eckpunktpaare von $z = XY$ harmonisch, und liegen paarweise auf den Geraden ZY, ZY_1, ZY_2.

Da der Kegelschnitt k des durch die Dreiecke bestimmten Tripels mit $\varkappa$ die vier Punkte $U_2U_2V_1V_2$, mit $\varkappa'$ die Tangenten dieser Punkte gemein hat, und ausserdem die Polaren U_1U_2 und V_1V_2 der Punkte U und V von $\varkappa$ nach k, den Kegelschnitt $\varkappa'$ berühren, so sind $\varkappa$ und $\varkappa'$ Polarfiguren von einander bezüglich k, und ebenso bezüglich den zwei anderen Kegelschnitten k_1, k_2 des konjugierten Tripels.

Es giebt aber noch zwei andere Kegelschnitte k_r und k_i, welche $\varkappa$ und $\varkappa'$ in einander polarisieren. Für den ersten Kegelschnitt der reell ist, sind die Dreiecke UU_1U_2, VV_1V_2 Polarfiguren von einander; für den zweiten der imaginär ist, sind dieselben Polardreiecke. Beide Kegelschnitte aber haben mit $\varkappa$ und $\varkappa'$ eine doppelte imaginäre Berührung in den Punkten II'.

Die Kegelschnitte k_r und k_i haben auch mit jedem Kegelschnitt des Tripels eine doppelte Berührung und polarisieren jeden derselben in sich selbst.

Denn z. B. sind für k_i und k_r die Polaren der zwei Punkte (U_1U_2, VV_1), (V_1V_2, UU_1), die sich in Y_1 treffende Geraden VU_2, UV_2; somit gehen beide Kegelschnitte durch diejenigen reellen Punkte von y_1, welche jene zusammengehörige Pole und Polaren harmonisch trennen, und werden in diesen von den sich in Y_1 treffenden Strahlen berührt. Ebenso sind die Polaren der Punkte U_1, V_1 bezüglich k_1 und k_i die Geraden U_2U, V_2V; daher gehen beide Kegelschnitte durch die konjugiert-imaginären Punkte der Geraden $x_1 = U_1V_1$, welche jene zusammengehörige Pole und Polaren harmonisch trennen und die konjugiert-imaginäre Tangenten dieser Punkte treffen sich in dem reellen Punkt X_1.

Ferner sind die Polaren des Punktes U von k_1 bezüglick k_r und k_i die Geraden V_1V_2, bzw. U_1U_2 und diese berühren den Kegelschnitt k_1, somit ist auch die letzte Behauptung bewiesen.

Alles zusammengefallt können wir daher sagen:

Die sechs Eckpunkte von zwei vierfach perspektiven Dreiecken liegen auf einem Kegelschnitt $\varkappa$ und die Seiten derselben berühren einen Kegelschnitt $\varkappa'$; diese berühren einander auf einer der Kollineationsachsen der perspektiven Dreiecke in zwei konjugiert-imaginären Punkten II'.

Diese zwei Kegelschnitte sind Polarfiguren von einander in bezug auf einen reellen und einen imaginären Kegelschnitt k_r, bzw. k_i; für k_r sind die zwei angenommenen Dreiecke Polarfiguren von einander, für k_i sind jene Dreiecke Polardreiecke; beide berühren die Kegelschnitte $\varkappa$ und $\varkappa'$ in den Punkten II' und bezüglich beide sind diese Kegelschnitte Polarfiguren von einander.

$\varkappa$ und $\varkappa'$ sind aber auch Polarfiguren von einander in bezug auf jeden Kegelschnitt des konjugierten Tripels den die zwei vierfach perspektiven Dreiecke bestimmen (1). *Anderseits polarisieren die Kegelschnitte k_r und k_i jeden Kegelschnitt des konjugierten Tripels in sich selbst.*

Ausserdem hat man:

Die konjugierten Kegelschnitte eines Tripels werden von einem reellen und einem imaginären Kegelschnitt k_r, bzw. k_i doppelt berührt. Die Berührungssehnen dieser Kegelschnitte k_r, k_i mit jedem Kegelschnitt des Tripels sind die zwei gemeinsamen Sehnen der zwei anderen Kegelschnitte des Tripels; u. z. berührt jener erste Kegelschnitt des Tripels den reellen (imaginären) Kegelschnitt k_r (k_i) auf derjenigen gemeinsamen Sehne, auf welchen die zwei konjugiert-imaginären (reellen) Punkte der zwei anderen Kegelschnitte des Tripels liegen.